Parametrisierte Algorithmen

Vorlesung im WS 2004/5

Jens Gramm

Theoretische Informatik/Formale Sprachen,
Wilhelm-Schickard Institut für Informatik,
Universität Tübingen

Folien nach Vorlage von Rolf Niedermeier (Vorlesung WS 2002/3)

Gesamtüberblick

Kapitel 1 — Einführendes Beispiel: Vertex Cover

Überblick:

- Definition Vertex Cover
- Approximationsalgorithmen für Vertex Cover
- Exakte Lösung: Ein Suchbaum für Vertex Cover
- Variationen zu Vertex Cover

Definition Vertex Cover

Vertex Cover / Knotenüberdeckungsproblem

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, positive ganze Zahl k.
Frage: Existiert eine Knotenüberdeckung der Größe $\leq k$?

Knotenüberdeckung ist Menge $C \subseteq V$, sodass jede Kante aus E mindestens einen Endpunkt in C hat.

- Vertex Cover ist NP-vollständig!
- Anwendungen: Konfliktauflösung, Überwachungssysteme, ...

1. Approximationsalgorithmus für Vertex Cover

„Greedy"-Heuristik

starte mit $C := \emptyset$;
while (es gibt noch Kanten in G) **do**
  Nimm den Knoten mit größter Anzahl von Nachbarn,
  füge ihn zu C hinzu und lösche ihn zusammen
  mit seinen anliegenden Kanten aus G

2. Approximationsalgorithmus für Vertex Cover

„Trivialer Ansatz"

starte mit $C := \emptyset$;
while (es gibt noch Kanten in G) **do**
  Nimm irgendeine Kante $\{u, v\}$,
  füge sowohl u als auch v zu C hinzu und
  lösche beide aus G zusammen mit den anliegenden Kanten

Approximation von Vertex Cover

Lemma

Obiger Algorithmus („Trivialer Ansatz") liefert eine Faktor-2-Approximation für Vertex Cover. □

Bemerkungen:

- Obiger Algorithmus im wesentlichen der beste bekannte Polynomzeit-Approximationsalgorithmus für Vertex Cover. Lediglich asymptotisch besser: Monien/Speckenmeyer (1985) und Bar-Yehuda/Even (1985) zeigen Approximation mit Faktor $\left(2 - \frac{\log\log n}{2\log n}\right)$.
- Håstad (1997): Kein besserer Approximationsalgorithmus als mit Faktor 1.1666, es sei denn $P = NP$.

Exakte Lösung: Suchbaum für Vertex Cover I

1. Konstruiere einen vollständigen Binärbaum der Tiefe k.
2. Markiere den Wurzelknoten mit $(G, \emptyset)$.
3. Restliche Baumknoten rekursiv wie folgt markieren: Sei (H, S) markierter Baumknoten mit zwei unmarkierten Kindern. Wähle beliebige Kante $\{u, v\}$ aus Kantenmenge von H.
   1. Markiere das linke Kind mit $(H - u, S \cup \{u\})$.
   2. Markiere das rechte Kind mit $(H - v, S \cup \{v\})$.
4. **if** Es gibt Baumknoten mit Markierung $(\text{leerer Graph}, S')$
   then S' ist ein Vertex Cover der Größe $\leq k$
   else Es existiert kein Vertex Cover der Größe $\leq k$.

Suchbaum für Vertex Cover II

Lemma

Obiger Suchbaumalgorithmus hat die Laufzeit

$$O(2^k \cdot |G|),$$

wobei $|G| =$ Graphgröße. □

- Zentrale Beobachtung: Ist k „klein“ im Vergleich zur Eingabegröße n, so ist obiger parametrisierter Algorithmus „effizient“.
- Für $k = O(\log n)$ liefert obige Suchbaummethode Polynomzeitalgorithmus.

Suchbaum für Vertex Cover III

Verkleinerung der Suchbaumgröße dank Fallunterscheidung:

Fall 1: Bei Knoten mit nur einem Nachbarn nimm' deren Nachbarn in das Vertex Cover.

Fall 2: Falls ein Knoten v genau zwei Nachbarn hat, so nimm' entweder v und die Menge „aller Nachbarn seiner Nachbarn“ oder seine beiden Nachbarn in das Vertex Cover.

Fall 3: Falls alle Knoten des Graphen mindestens je drei Nachbarn haben, so nimm für einen solchen Knoten v entweder ihn selbst oder seine mindestens drei Nachbarn ins Vertex Cover.

Variationen zu Vertex Cover I

Das Studium parametrisierter Algorithmen kann in verschiedenste Richtungen gehen:

Parametrisierungsvarianten

- Die „duale“ Parametrisierung $n - k$ führt zum sogenannten Independent Set Problem... und ermöglicht keinen effizienten parametrisierten Algorithmus.
- Beschränkung auf planare Graphen: Vertex Cover Größe beschränkt durch $\lfloor 3n/4 \rfloor$ (Vierfarbentheorem für planare Graphen).
  Parametrisierte Komplexität der Frage, ob ein gegebener planarer Graph ein Vertex Cover der Größe $\lfloor 3n/4 \rfloor - k$ besitzt, ist offen.

Variationen zu Vertex Cover II

Spezialisierungen

- Vertex Cover beschränkt auf planare Graphen ist einfacher— es gibt parametrisierte Algorithmen mit Laufzeit $O(c^{\sqrt{k}} + kn)$ für konstantes c.

Verallgemeinerungen

- Gewichtetes Vertex Cover, Capacitated Vertex Cover.
- Vertex Cover auf Hypergraphen: Hitting Set Probleme.

Zählen und Aufzählen

- Zähle die Zahl der optimalen Vertex Covers.
- Zähle alle optimalen Vertex Covers Schritt für Schritt auf.

Variationen zu Vertex Cover III

Untere Schranken

- Kann Vertex Cover in Zeit $(1+\epsilon)^k \cdot n^{O(1)}$ gelöst werden für beliebiges $\epsilon > 0$ oder gibt es minimalen ϵ-Wert?
- Kann Vertex Cover auf allgemeinen Graphen in Zeit $2^{o(k)} \cdot n^{O(1)}$ gelöst werden?

Implementiere und wende an

- Effizienz verschiedener Methodiken sowohl auf sequentiellen als auch parallelen Maschinen.
- Re-Engineering von Fallunterscheidungen bei Suchbaumalgorithmen.